

# Фактическая максимальная амплитуда предельных циклов в цифровом фильтре второго порядка при нулевом входе

Александр Мингазин (Москва)

В статье рассматривается цифровой БИХ-фильтр второго порядка прямой формы, работающий с фиксированной точкой и единственным округлением после суммирования. Сравняются существующие верхние границы амплитуды предельных циклов при нулевом входе фильтра и их фактическая максимальная амплитуда, найденная прямым моделированием с помощью алгоритма исчерпывающего поиска. Иллюстрируются зависимости максимальной амплитуды от значений коэффициентов фильтра. На основе анализа зависимостей установлены области коэффициентов, где фактическая максимальная амплитуда предельных циклов определяется аналитически. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании более сложных структур фильтров, состоящих из звеньев не выше второго порядка, например, каскадных или параллельных.

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при нулевом входе и произвольных внутренних переменных ошибка на выходе цифрового БИХ-фильтра, обусловленная квантованием (округлением или усечением) в цепях обратной связи, если не становится равной нулю, то принимает детерминированный колебательный характер. На выходе фильтра возникает малый предельный цикл. Важно знать максимальную амплитуду предельных циклов, чтобы оценить степень их допустимости или полностью устранить их путём более грубого реквантования [1, 2].

Использование существующих границ на максимальную амплитуду предельных циклов может давать заниженные или завышенные результаты, что порождает неверные оценки длины слова переменных в фильтре. В первом случае это приводит к недопустимому уровню паразитных колебаний на выходе фильтра при нулевом входе, во втором – к неоправданным затратам на его реализацию.

Фактическая максимальная амплитуда может быть найдена прямым мо-

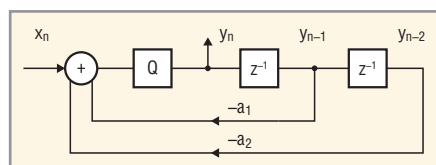


Рис. 1. Структура БИХ-фильтра второго порядка прямой формы с округлением после сумматора

делированием с помощью алгоритмов исчерпывающего поиска для возможных значений переменных внутри фильтра. Однако, эта процедура может потребовать неприемлемых вычислительных затрат на компьютере даже для простейших фильтров. Данная статья посвящена проблеме определения максимальной амплитуды предельных циклов в фильтре второго порядка прямой формы при нулевом входе, оперирующим с фиксированной точкой и единственным округлением после суммирования. Благодаря нашим исследованиям, выявлены области коэффициентов, в которых фактическая максимальная амплитуда может быть найдена аналитически по известным соотношениям. Представленные результаты могут быть использованы при проектировании более сложных структур фильтров, состоящих из звеньев не выше второго порядка, таких как каскадные или параллельные.

## СТРУКТУРА БИХ-ФИЛЬТРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Структура цифрового БИХ-фильтра второго порядка прямой формы представлена на рисунке 1, где единственная операция квантования Q выполняется после суммирования. Под операцией квантования будем понимать округление. Положим, что коэффициенты фильтра находятся в треугольнике устойчивости, т.е. имеет место усло-

вие  $|a_1| - 1 < a_2 < 1$ , фильтр оперирует с фиксированной точкой, и абсолютная величина его переменных  $x_n, y_n$  меньше единицы.

## Вероятностные оценки ошибки округления

Допустим, что для фильтра рис. 1 справедлив известный вероятностный подход для оценки ошибки округления. В этом случае ошибка трактуется как шум квантования (округления) с предписанными свойствами. Параметры шума на выходе фильтра определяются на основе  $L_2$ - или  $L_\infty$ -нормы для передаточной функции цепи от точки округления до выхода фильтра. В нашем случае этой цепи соответствует передаточная функция самого фильтра  $H(z)$ , а дисперсия и максимум спектральной плотности мощности шума на выходе определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \delta^2 \|H\|_2^2 = \\ &= \delta^2 \frac{1+a_2}{(1-a_2)(1-a_1+a_2)(1+a_1+a_2)} \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$S_{\max} = \delta^2 \|H\|_\infty^2 = \delta^2 |H(z)|_{\max}^2, \quad (2)$$

где  $\delta^2 = q^2 / 12$  – дисперсия шума квантования,  $q$  – шаг квантования.

Оценки уровней шума (1) и (2) используем далее для сопоставления с оценками уровней предельных циклов, что полезно выполнять и при проектировании конкретных фильтров.

## Верхние границы амплитуды предельных циклов

Для фильтра, представленного на рисунке 1, рассмотрим три известных варианта оценки верхней границы амплитуды предельных циклов при нулевом входе ( $x_n = 0$ ).

Первый вариант оценки [3] основан на местоположении т.н. эффективных полюсов фильтра, обусловленном округлением, и не всегда даёт верные результаты. Согласно этому методу, максимальная амплитуда предельного цикла при нулевом входе

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \left( \frac{1}{1-|a_2|} \right) \quad (3)$$

для полюсов, попадающих на единичную окружность, и

$$A_{\max} \leq q \left( \frac{1}{1-|a_1|+a_2} \right) \quad (4)$$

для полюсов, попадающих в точку  $z=1$  или  $z=-1$  на единичной окружности в  $z$ -плоскости.

Формулы (3) и (4) получены для округления после каждого умножения. Далее приведены соотношения для обсуждаемого нами случая округления после суммирования.

Второй вариант оценки – известный детерминированный метод – основан на вычислении  $l_1$ -нормы для импульсной характеристики цепи от точки округления до выхода фильтра. В нашем случае этой цепи соответствует импульсная характеристика самого фильтра  $b(n)$ . Метод даёт абсолютную верхнюю границу амплитуды как при нулевом, так и при произвольном входном сигнале, и может приводить к сильно завышенным результатам. В этом случае

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \|b\|_1 = \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)|. \quad (5)$$

Для фильтра с полюсным радиусом, очень близким к единице, и/или с полюсным углом, очень близким к 0 или  $\pi$ , требуется большое время расчёта оценки (5) на компьютере.

Были предприняты попытки получения замкнутого выражение для  $\|b\|_1$  [4–6]. Так, авторы [4] нашли точное со-

отношение в случае действительных полюсов, совпадающее с выражением в скобках (4), и лишь приближённое в случае комплексно-сопряжённых полюсов. Аналогичные результаты получены в [5]. Более точная, но всё же приближённая оценка  $\|b\|_1$  для комплексно-сопряжённых полюсов предложена в [6]. Можно показать, что при  $a_1=0$  и  $0 < a_2 < 1$  (частный случай комплексно-сопряжённых полюсов) норма  $\|b\|_1 = 1/(1-a_2)$ . В то же время, использование приближённых соотношений из [4] и [6] приводит к превышению этой нормы соответственно в  $1+\sqrt{a_2}$

$$\|H\|_{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{(1-a_2) \left(1 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right)^{1/2}} & \text{для } a_2 > 0 \text{ и } |a_1| < \frac{4a_2}{1+a_2}, \\ \frac{1}{1-|a_1|+a_2} & \text{для } a_2 \leq 0 \text{ или } a_2 > 0, |a_1| \geq \frac{4a_2}{1+a_2}. \end{cases}$$

Можно убедиться, что верхнее выражение для нормы  $\|H\|_{\infty}$  соответствует комплексно-сопряжённым полюсам, а нижнее, совпадающее с выражением в скобках (4), – как действительным, так и комплексно-сопряжённым полюсам. Учитывая вышеизложенное, можно заключить, что  $\|b\|_1 = \|H\|_{\infty}$  для любых действительных полюсов и для комплексно-сопряжённых полюсов при  $a_1=0$  и  $0 < a_2 < 1$ . В остальных случаях, как известно,  $\|b\|_1 \geq \|H\|_{\infty}$ .

**Условие отсутствия предельных циклов**

В рассматриваемом фильтре второго порядка при нулевом входе предель-

и  $\left[1+(2\sqrt{2}-1)a_2\right]/(1+a_2)$  раз, а при  $a_2 \rightarrow 1$  эти превышения стремятся к 2 и  $\sqrt{2}$  раз. Интересно отметить, что при  $a_1=0$  и  $0 < |a_2| < 1$  норма соответствует выражению в скобках (3).

Третий вариант оценки верхней границы амплитуды предельного цикла [7] основан на вычислении  $L_{\infty}$ -нормы для передаточной функции цепи от точки округления до выхода фильтра. В нашем случае имеем оценку:

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \|H\|_{\infty} = \frac{q}{2} |H(z)|_{\max}, \quad (6)$$

где

ные циклы отсутствуют, если имеет место условие (см., например, [8]):

$$|a_1| - 0,5 < a_2 < 0,5. \quad (7)$$

Заметим, что в сложных фильтрах, особенно с узкой полосой (пропускания, задерживания или переходной), состоящих из ряда звеньев второго порядка, это условие обычно не выполняется.

**Поиск фактической максимальной амплитуды предельных циклов**

Соотношения (3)–(6) не всегда приводят к верным оценкам максимальной амплитуды предельных

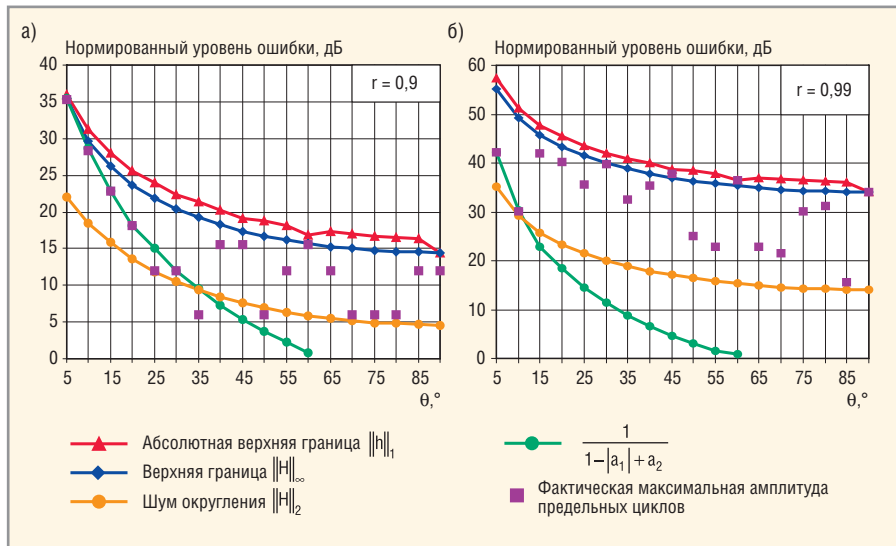


Рис. 2. Зависимости нормированного уровня ошибки округления от полюсного угла фильтра рис. 1 для полюсного радиуса  $r = 0,9$  (а) и  $r = 0,99$  (б)

циклов при нулевом входе. Фактическую максимальную амплитуду можно определить путём прямого моделирования, применив алгоритм исчерпывающего поиска [9] для возможных значений двух переменных  $(y_{n-1}, y_{n-2})$  фильтра, показанного на рисунке 1.

Для экономии времени поиска, в случае комплексно-сопряжённых полюсов фильтра, диапазон изменения этих переменных лучше ограничить сверху границей (5), а не завышенной оценкой [4], как в [9]. При этом, если в процессе работы алгоритма текущее значение амплитуды обнаруженного предельного цикла оказывается равным абсолютной верхней границе  $q \cdot 0,5 / \|b\|_1$ , поиск заканчивается, поскольку эта величина не может быть превышена. Здесь и далее  $\lfloor x \rfloor$  означает целую часть  $x$ .

**Некоторые сравнения и замечания**

Интересно сопоставить фактическую максимальную амплитуду предельных циклов с её границами (5) и (6), с двумя её упрощёнными оценками (частные случаи (5) и (6)), а также с уровнями шума округления (1) и (2). Удобно сравнивать нормированные уровни ошибки округления (амплитуды предельного цикла или мощности шума округления), выраженные в децибелах. Так, нормированные уровни для выражений (2) и (6) при знаке равенства в (6) соответствуют  $S_{\max} / \delta^2 = \|H\|_{\infty}^2$  и  $A_{\max} / (0,5q) = \|H\|_{\infty}$ . Поэтому, выраженные в децибелах, они идентичны. Нормированным

уровням для (1) и (5) при знаке равенства в (5) соответствуют  $\sigma^2 / \delta^2 = \|H\|_2^2$  (это отношение часто называют усилением шума) и  $A_{\max} / (0,5q) = \|b\|_1$ . Под нормированными упрощёнными оценками будем понимать  $A_{\max} / (0,5q) = 1 / (1 - |a_2|)$  и  $A_{\max} / (0,5q) = 1 / (1 - |a_1| + |a_2|)$ , которые соответствуют выражениям в скобках (3) и (4) и, как было отмечено, являются частными случаями норм  $\|b\|_1, \|H\|_{\infty}$ .

На рисунках 2а, 2б представлены зависимости нормированного уровня ошибки округления на выходе фильтра (см. рис. 1) от полюсного угла  $5^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  для двух значений полюсного радиуса  $r = 0,9$  и  $r = 0,99$ . Параметры  $r = \sqrt{a_2}$  и  $\theta = \arccos(-0,5a_1 / \sqrt{a_2})$  соответствуют комплексно-сопряжённым полюсам фильтра. Оценка уровня  $1 / (1 - |a_2|)$  не зависит от  $\theta$  и на рисунке не показана. Для  $r = 0,9$  и  $r = 0,99$  её значения, выраженные в децибелах, равны 14,4 и 34 дБ соответственно.

Кривые, соответствующие аналитическим оценкам уровня ошибки на рисунке 2, имеют регулярный характер, а точки, полученные с помощью алгоритма исчерпывающего поиска, располагаются хаотично, за исключением зоны малых углов. В этой зоне, ограниченной справа окрестностью точки пересечения двух нижних кривых, результаты поиска достаточно хорошо совпадают с оценкой  $1 / (1 - |a_1| + |a_2|)$ . В точке пересечения имеет место равенство  $1 / (1 - |a_1| + |a_2|) = \|H\|_2$  или – с учётом (1) – равенство  $|a_1| = a_2(1 + a_2)$ .

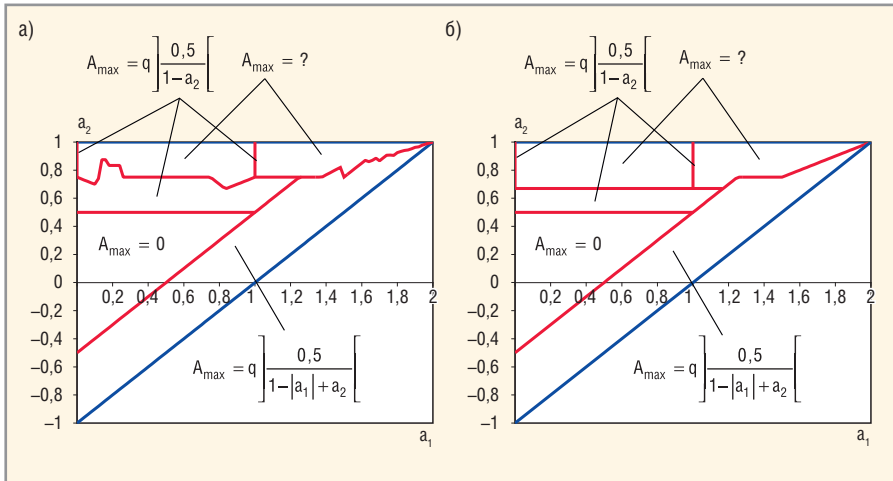
Фактическая максимальная амплитуда предельных циклов может быть меньше уровня шума округления (см.

рис. 2а), или доходить до абсолютной верхней границы, или быть ниже её на 21 дБ (при  $\theta = 10^\circ$  на рис. 2б). Последнее оправдывает нахождение фактической максимальной амплитуды, а не использование верхних границ (выражения (5) и (6) при знаке равенства в них).

Следует отметить, что при требовании контролировать максимум спектральной плотности мощности шума округления (2), а не его дисперсию (1), можно обходиться без нахождения фактической максимальной амплитуды, довольствуясь абсолютной верхней границей (5), если важно знать максимально возможный уровень предельных циклов, или оценкой (2), если в этом нет необходимости. Это обусловлено близостью  $\|b\|_1$  и  $\|H\|_{\infty}$ . Максимальное различие между границами не превышает 2,1 дБ (см. рис. 2). Дополнительные расчёты показывают, что это различие сохраняется для достаточно плотной сетки точек области устойчивости, соответствующей комплексно-сопряжённым полюсам фильтра.

Данный факт можно использовать для приближённого вычисления  $\|b\|_1 \cong 1,274 \|H\|_{\infty}$ . Интересно сравнить эту оценку  $\|b\|_1$  с полученной в работе [6] для разных областей треугольника устойчивости. Так, например, для  $a_2 = 0,99$  и  $0,2 \leq |a_1| \leq 1,8$  при шаге 0,2 предлагаемая нами и в [6] оценки  $\|b\|_1$  дают ошибки не более 0,05 дБ и 3,1 дБ соответственно. Дальнейшее изучение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Ещё одно наблюдение связано с областью перебора переменных в алгоритме исчерпывающего поиска, ограниченной абсолютной верхней границей. Для фильтров с полюсным радиусом  $r$ , близким к 1, особенно при угле  $\theta$ , близким к 0 или  $\pi$ , эта граница очень высока, поэтому велико число вариантов перебора и время выполнения алгоритма. Эксперименты показывают, что фактическая максимальная амплитуда предельных циклов может быть найдена для очень малой области перебора. Так, для  $r = 0,99$  и  $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$  и  $20^\circ$  (см. рис. 2б) абсолютные верхние границы амплитуды, выраженные в целых числах, соответственно равны 365, 183, 122 и 92. Результаты, представленные на рисунке 2б для этих  $\theta$ , могут быть найдены и в случае замены



**Рис. 3. Области определения фактической максимальной амплитуды предельных циклов для фильтра рис. 1 при нулевом входе**

а) Точные и б) упрощённые границы областей

указанных верхних границ на значения 3, 1, 16 и 3, что значительно экономит время и свидетельствует о важности выбора области перебора в алгоритмах исчерпывающего поиска [10, 11].

**Аналитический расчёт фактической максимальной амплитуды**

Проведённый анализ многих зависимостей, подобных представленным на рисунке 2, позволил установить области коэффициентов обсуждаемого фильтра, для которых фактическая максимальная амплитуда предельных циклов при нулевом входе может быть вычислена аналитически, без применения исчерпывающего поиска. Для правой половины упомянутого выше треугольника устойчивости на рисунке 3а эти области показаны наряду с областью отсутствия предельных циклов (7), когда  $A_{max} = 0$ . Левая половина треугольника является зеркально симметричной.

Для областей, где  $A_{max} = ?$ , фактическая максимальная амплитуда может быть найдена алгоритмами исчерпывающего поиска, например [9]. По существу мы обнаружили, что два известных соотношения [3–7] для оценки лишь верхней границы амплитуды предельных циклов дают фактическую максимальную амплитуду для областей коэффициентов, указанных на рисунке 3.

Заметим, что для области, где  $A_{max} = q|0,5/(1 - |a_1| + a_2)|$ , линиями постоянства  $A_{max}$  являются прямые, параллельные сторонам  $1 - |a_1| + a_2 = 0$  треугольника устойчивости. Для этой об-

ласти соответствующий период предельного цикла равен 1 при  $a_1 < 0$  и 2 при  $a_1 \geq 0$ , что подтверждается моделированием. Переход от точки на линии  $A_{max} = const$  в обсуждаемой области к точке на этой же линии, но в области, помеченной на рисунке 2а как  $A_{max} = ?$ , сопровождается непредсказуемым изменением фактической максимальной амплитуды и периода предельного цикла.

Как видим, граница областей, проходящая от точки  $|a_1| = 1, a_2 = 0,5$  до точки  $|a_1| = 2, a_2 = 1$  на рисунке 3а колеблется с затуханием вдоль кривой, соответствующей ранее упомянутому равенству  $|a_1| = a_2(1 + a_2)$ . На практике вместо сложных границ областей на рисунке 3а удобно использовать их упрощения, например, прямыми линиями  $a_2 = 0,6699$ ,  $a_2 = 0,7499$  и  $a_2 = 0,5|a_1|$ , как показано на рисунке 3б. В таблице 1 представлены соотношения для определения  $A_{max}$  и области коэффициентов с упрощёнными границами. Такое упрощение несколько сужает области коэффициентов, где справедливы две формулы таблицы 1 для расчёта  $A_{max}$ .

**ПРИМЕРЫ**

В таблице 2 приведены оценки максимальной амплитуды предельных циклов и фактические её значения, полученные с применением несколько модифицированного алгоритма исчерпывающего поиска [9] и формул таблицы 1. Для первых трёх (см. таблицу 2) и ещё целого ряда примеров найденные нами с помощью этого алгоритма значения фактической максимальной ампли-

**Таблица 1. Соотношения для расчёта фактической максимальной амплитуды предельных циклов фильтра, представленного на рисунке 1, при нулевом входе**

$A_{max}$	Области коэффициентов
$q \left[ \frac{0,5}{1- a_1 +a_2} \right]$	$a_2 \leq 0,5 a_1 $ и $ a_1  - 0,5 \leq a_2 \leq 0,7499$
$q \left[ \frac{0,5}{1-a_2} \right]$	$(a_2 > 0,6699$ при $ a_1  = 0$ или $1)$ или $(0,5 \leq a_2 \leq 0,6699$ или $ a_1  - 0,5 > a_2)$
0	$ a_1  - 0,5 < a_2 < 0,5$
?	В остальных случаях

**Таблица 2. Примеры оценки максимальной амплитуды предельных циклов и её фактическое значение для фильтра, представленного на рисунке 1, при нулевом входе**

№	$a_1$	$a_2$	$r$	$\theta$ , рад.	$A_{max}/q$		
					$]0,5\ h\ _1[$	$]0,5\ h\ _\infty[$	Алгоритм или формулы табл. 1
1	-1,89051	0,9025	0,95	0,1	62	51	41
2	-1,97011	0,9801	0,99	0,1	319	251	50
3	-1,980055	0,990025	0,995	0,1	638	502	50
4	-1,98364	0,990025	0,995	0,08	798	627	78
5	0	0,998001	0,999	1,57083	250	250	250
6	1	0,9801	0,99	1,04136	36	29	25

туды совпадают с представленными [9, 10].

Для всех примеров из таблицы 2 результаты исчерпывающего поиска и результаты, полученные по соотношениям таблицы 1, совпадают. Верхние границы максимальной амплитуды, соответствующие (5) и (6), могут давать сильно завышенные значения (см. примеры 2 – 4).

При стремлении радиуса  $r$  к 1 и/или угла  $\theta$  к 0 или  $\pi$  растёт число вариантов перебора в алгоритме и длительность импульсной характеристики фильтра, что в свою очередь приводит к росту времени выполнения алгоритма на компьютере. Для примеров 1, 5 и 6 это время несущественно (на компьютере с тактовой частотой процессора 2,7 ГГц). Для примеров 2 – 4 время выполнения составляет  $\approx 90$  с,  $\approx 13$  мин и  $\approx 21$  мин соответственно.

Для дополнительного примера при  $r = 0,9987$  и  $\theta = 0,05$  ( $a_1 = -1,994903$ ,  $a_2 = 0,997402$ ) абсолютная верхняя граница предельного цикла  $]0,5\|h\|_1[ = 4901$ . Количество вариантов перебора здесь настолько велико ( $5 \times 10^7$ ), что для выполнения исчерпывающего поиска с помощью обсуждаемого алгоритма потребовались бы десятки часов работы упомянутого компьютера. Заданные коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$

соответствуют первой формуле таблицы 1, расчёт по которой приводит к  $A_{max}/q = 200$ . Интересно, что запуски алгоритма при очень малом числе вариантов (всего 4) и с увеличенным числом до  $5 \times 10^5$  (затраченное время  $\approx 27$  мин) дают аналогичный результат.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что для БИХ-фильтра второго порядка прямой формы, оперирующего с фиксированной точкой и единственным округлением после суммирования, фактическая максимальная амплитуда предельных циклов при нулевом входе может быть вычислена по одной из двух хорошо известных простых формул. Путём прямого моделирования с применением алгоритма исчерпывающего поиска найдены области коэффициентов, в которых справедливы эти формулы.

Для фильтров с полюсными радиусами, очень близкими к 1, проблема определения фактической максимальной амплитуды предельных циклов при нулевом входе остаётся по-прежнему открытой, т.к. предложенный аналитический подход решает её лишь частично, известные оценки верхней границы могут давать сильно завы-

шенные результаты, а алгоритмы исчерпывающего поиска требуют неприемлемых временных затрат на компьютере.

Если же, наряду с уровнем предельных циклов при нулевом входе, требуется контролировать максимум спектральной плотности мощности шума округления, а не его дисперсию, то можно обходиться без нахождения фактической максимальной амплитуды предельных циклов, используя абсолютную верхнюю границу амплитуды. Это связано с близостью пикового уровня шума округления и абсолютной верхней границы предельных циклов для рассматриваемого фильтра.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Butterweck H.-J., Ritzerfeld J., Werter M. Finite wordlength effects in digital filters. AEU. 1989. Vol. 43. № 2. PP. 76–89.
2. Мингазин А. Длина слова переменных в каскадных БИХ-фильтрах. Современная электроника. 2011. № 1. С. 70–74.
3. Jackson L.B. An analysis of limit cycles due to multiplication rounding in recursive digital filters. Proc. 7th Annual Allerton Conf. Circuits Theory. 1969. Oct. PP. 69–78.
4. Long J.E., Trick T.N. An absolute bounds on limit cycles due to roundoff errors in digital filters. IEEE Trans. 1973. AU-21. Feb. PP. 27–30.
5. Yakowitz S., Parker S.R. Computation of bounds for digital filter quantization error. IEEE Trans. 1973. CT-20. July. PP. 391–396.
6. Chang T.L. A note on upper bounds on limit cycles in digital filters. IEEE Trans. 1976. ASSP-24. Feb. PP. 99–100.
7. Sandberg I.W., Kaiser J.F. A bound on limit cycles in fixed-point implementations of digital filters. IEEE Trans. 1972. AU-20. June. PP. 110–112.
8. Bauer P.H., Leclerc L.-J. A computer-aided test for the absence of limit cycles in fixed-point digital filters. IEEE Trans. 1991. SP-24. Nov. PP. 2400–2410.
9. Djebbari A., Belbachir M. F., Rouvaen J.M. A fast exhaustive search algorithm for checking limit cycles in fixed-point digital filters. Signal Processing. 1998. Vol. 69. PP. 199–205.
10. Munson D.C., Strickland J.H., Walker T.P. Maximum amplitude zero-input limit cycles in digital filters. IEEE Trans. 1984. CAS-31. March. PP. 266–274.
11. Osés-del Campo J.D., Cruz-Roldan F., Utrilla-Manso M. Tighter limit cycle bounds for digital filters. IEEE Signal Processing Letters. 2006. Vol. 13. № 3. PP. 149–152.

